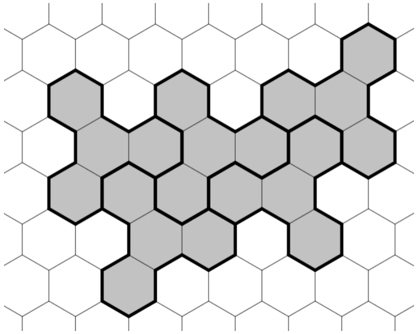
Всесибирская открытая олимпиада школьников
2024-2025 г.г. по математике
Отборочный этап. 7 класс

7.1. Разрежьте данную фигуру по линиям шестиугольной сетки на 5 равных частей.

Решение. Пример разрезания изображён ниже.



Критерии. Любой верный пример (хотя, кажется, есть всего один правильный вариант разрезания) — 7 баллов.

7.2. Мальчик Антон идёт от одной трамвайной остановки до другой. Пройдя треть пути, он увидел, что его догоняет трамвай. Оказалось, что в какую бы сторону Антон ни побежал, он окажется на остановке одновременно с трамваем. Во сколько раз скорость мальчика меньше скорости трамвая? Все скорости постоянны.

Решение. Пусть Антон идёт от остановки A к остановке B. Можем считать для удобства, что между этими остановками расстояние в 3 метра (отмасштабируем задачу, от этого отношение скоростей не поменяется). Согласно условию, пока мальчик бежит 1 метр к A, трамвай доезжает до этой же остановки. Значит, если Антон побежит к B, то трамвай доедет до A ровно в тот момент, когда мальчик будет на расстоянии в 2 метра от A. Начиная с этого момента до B трамваю нужно преодолеть 3 метра, а Антону — 1 метр, и сделают они это одновременно, из чего следует, что скорость мальчика меньше скорости трамвая в 3 раза.

Критерии. Только ответ — 1 балл.

Только ответ с примером конкретных скоростей и расстояний — 2 балла.

7.3. На острове располагаются три города, все жители которых являются либо рыцарями, которые всегда говорят правду, либо лжецами, которые всегда врут. Однажды каждый житель острова заявил: «В одном из других городов лжецов живёт меньше, чем в моём городе». Может ли на этом острове проживать ровно 2024 человека?

Решение. Пусть даны города A, B и C.

Рассмотрим город A. Так как все его жители произнесли одно и то же утверждение, в A живут либо только рыцари, либо только лжецы (либо там вообще никто не живёт). Заметим, что только рыцари проживать там не могут, так как в противном случае они бы утверждали, что в B или C живёт меньше нуля лжецов. Значит, все жители A — лжецы. Аналогично для B и C, то есть вообще все люди на острове являются лжецами.

Осталось заметить, что 2024 не делится на 3, и поэтому, если всего людей столько, найдутся два города, в первом из которых лжецов больше, чем во втором. Но тогда лжецы первого города скажут правду, что невозможно. Значит, 2024 человека на острове проживать не может.

Замечание. Описанная ситуация возможна, если во всех городах живёт поровну человек.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Доказано, что на острове живут только лжецы — 3 балла.

Не отмечено, что в каком-то городе может вообще никого не жить — баллы не снимать.

7.4. В верном примере на возведение в степень девочка Арина заменила одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными. У неё получилось выражение $\text{АК}^{\text{С}} = \text{ИОМА}$. Каким мог быть изначальный пример?

Решение. Сразу запишем в таблицу, на какие цифры могут заканчиваться квадраты и кубы натуральных чисел, это пригодится далее.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
n^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Заметим, что цифра С не равна 0 и 1, так как из двухзначного числа получается четырёхзначное, и $С \leqslant 3$, так как даже $10^4 = 10000$ — уже пятизначное число. Значит, это двойка или тройка. Рассмотрим оба случая.

Случай 1. Пусть $С = 3$. Тогда $А < 3$, так как $30^3 > 10000$. Кроме того, $А \neq 0$, так как это первая цифра числа.

Случай 1.1. Пусть $А = 1$. Тогда $К \neq 1$, но куб числа заканчивается на единицу, только если само число заканчивается на единицу. Значит, в этом случае решений нет.

Случай 1.2. Пусть $А = 2$. Куб числа заканчивается на 2, только если оно само кончается на 8, поэтому $АК = 28$. Но $28^3 = 21952$, то есть и в этом случае решений нет.

Случай 2. Пусть $С = 2$. Тогда $А \geqslant 3$, так как $29^2 = 841 < 1000$. Кроме того, $А \neq 3, 7, 8$, так как квадраты не заканчиваются на эти цифры. К тому же, если $А = 5$, то $К = 5$, и две буквы отвечают одной цифре. Осталось немного перебрать.

Случай 2.1. Пусть $А = 4$. Тогда $К = 2$ или $К = 8$. Цифра 2 уже занята буквой С, поэтому имеем $48^2 = 2304$, что не подходит под ребус ($И = С = 2$).

Случай 2.2. Пусть $А = 6$. Тогда $К = 4$ или $К = 6$. Цифра 6 уже занята буквой А, поэтому имеем $64^2 = 4096$, что не подходит под ребус ($И = К = 4$).

Случай 2.3. Пусть $А = 9$. Тогда $К = 3$ или $К = 7$. В первом случае имеем $93^2 = 8649$, что подходит под условие, а во втором $97^2 = 9409$, что не подходит, так как повторяется девятка.

Итого, единственным решением является $93^2 = 8649$.

Критерии. Только верный ответ — 1 балл.

Следующие баллы суммируются.

Доказано, что $С = 2$ или $С = 3$ — 2 балла.

Верно рассмотрен случай С = 3 — 2 балла.

Верно рассмотрен случай С = 2 — 3 балла.

7.5. Несколько человек сыграли турнир в шахматы. Каждый сыграл с каждым ровно один раз, и за каждую победу участники получали 1 очко, за ничью — 0.5, за проигрыш — 0. Назовём участника этого турнира *грибным*, если он проиграл всем, кто в итоге набрал очков меньше него, но выиграл у всех, кто набрал больше. Докажите, что все грибные участники этого турнира набрали поровну очков.

Решение. Предположим, это не так, и нашлись грибные участники A и B такие, что A набрал a очков, B набрал b очков и $a > b$. Из условия следует, что A проиграл B, и тогда должен найтись такой участник C, набравший c очков, что A с ним сыграл строго лучше, чем с ним сыграл B (иначе за весь турнир A никак не наберёт очков больше, чем у B). В частности, в обоих матчах $A - C$ и $B - C$ не могла быть ничья, так что A выиграл у C или C выиграл у B.

Если A выиграл у C, то, так как A грибной, имеем $c > a > b$, то есть $b < c$, откуда, так как B тоже грибной, B выиграл у C. Это противоречит тому, что C сыграл с A и B по-разному.

Если C выиграл у B, то $c < b < a$, откуда $a > c$, и в силу грибности A получаем, что C победил A, откуда тоже следует противоречие.

Критерии. Только частные случаи — 0 баллов.

Идея рассмотрения описанного участника C — 2 балла.